d'où $\Phi'(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)$ et par suite $\Phi(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + C$

or $\Phi(\frac{\pi}{2}) = 0$ donc $-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin(\pi) + C = 0$ d'où $C = \frac{\pi}{4}$

on a pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $\Phi(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{\pi}{4}$

$U_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \Phi(0) = \frac{\pi}{4}$

4°/a) (U_n) est une suite décroissante donc $U_{n+2} \le U_{n+1} \le U_n$ et comme $U_n > 0$

on a : $\frac{U_{n+2}}{U_n} \le \frac{U_{n+1}}{U_n} \le 1$ soit $\frac{n+1}{n+4} \le \frac{U_{n+1}}{U_n} \le 1$

b) on a : $\lim_{n\to+\infty}(\frac{n+1}{n+4}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(1+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{4}{n})} = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$

c) * $U_0 = \frac{\pi}{4}$ et $U_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (-2x)\sqrt{1-x^2}\,dx$

$= \frac{1}{2}[\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3/2}]_0^1 = \frac{1}{3}$

$U_0.U_1 = \frac{\pi}{4}.\frac{1}{3} = \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2(0+1)(0+2)(0+3)}$

supposons que : $U_n.U_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$ et montrons que

$U_{n+1}.U_{n+2} = \frac{\pi}{2(n+2)(n+3)(n+4)}$

$U_{n+1}.U_{n+2} = U_{n+1}\frac{n+1}{n+4}U_n$

$= \frac{n+1}{n+4}U_n.U_{n+1} = \frac{n+1}{n+4}.\frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{\pi}{2(n+2)(n+3)(n+4)}$

Conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n.U_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$